**BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ**

***№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2013***

**УДК 517.95**

# ПОСТРОЕНИЕ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ-РИМАНА

**Н.А.АЛИЕВ, А.М.ГУЛИЕВА**
***Бакинский Государственный Университет,***
***Институт Математики и Механики***
***Академии Наук Азербайджана***
***nihan aliev.info @ gmail.com***
***guliyeva_a@hotmail.com***

*Как известно, граничные задачи рассматриваются в основном, для уравнения эллиптического типа, моделью которого является уравнение Лапласа. Излагаемая работа посвящена к граничной задаче для уравнения эллиптического типа первого порядка, т.е. уравнения Коши-Римана. Для того чтобы вся граница являлась носителем для граничного условия, необходимо привести нелокальные условия. Заметим, что локальные граничные условия Дирихле, Неймана или Пуанкаре (где вся граница являлась носителем для граничного условия) в нашем случае неприменимы.*

**Ключевые слова:** уравнение Коши-Римана, нелокальные граничные условия, сопряженная задача, фундаментальные решения, необходимые условия, сингулярность, регуляризация.

Заметим, что хорошо исследованы различные граничные задачи для уравнения эллиптического типа первого порядка Коши-Римана [1]-[5]. Излагаемая работа посвящена построению сопряженного оператора для граничной задачи, поставленной уравнением эллиптического типа первого порядка Коши-Римана с нелокальными граничными условиями. Схема построения сопряженного оператора частично совпадает со схемой, приведенной в работах [3]-[8]. Эта схема приводит к фредгольмовости поставленной граничной задачи, для которой нужны фундаментальные решения сопряженного уравнения и основные соотношения, которые приводят к необходимому условию. Эти необходимые условия для обыкновенного линейного дифференциального уравнения имеют вид как нелокальные граничные условия, а для уравнения с частными производными они содержат и глобальные слагаемые, т.е. интегралы по границам [2]-[6]. Далее некоторые необходимые условия содержат сингулярности. Эти сингулярности необщего положения, т.е. не регуляризуются с помощью формулы Пуанкаре- Бертрана [9], приведенной в [10], [11]. Учитывая, что в этих сингулярных интегралов находимся на спектре, поэтому регуляризация этих сингулярности приводится специальной схемой.

**Постановка задачи:** Пусть $D\subset R^2$-выпуклая по направлению $x_2$ ограниченная область с границами линии Ляпунова [12]. Рассмотрим следующую граничную задачу:

$$lu\equiv\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}+i\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}=0,\quad x=(x_1,x_2)\in D\subset R^2, \tag{1}$$

$$l_1u\equiv\alpha_1(x_1)u(x_1,\gamma_1(x_1))+\alpha_2(x_1)u(x_1,\gamma_2(x_1))=0,\ x_1\in[a_1,b_1], \tag{2}$$

$i=\sqrt{-1},\ \alpha_1(x_1),\ \alpha_2(x_1)$ -вообще говоря, комплекснозначная непрерывная функция на отрезке $[a_1,b_1]$, $u(x)$ - искомая аналитическая функция в области D. При проектированном область D на оси $x_1$, параллельно к $x_2$ граница $\Gamma$ разбивается на части $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, которые записываются с помощью уравнений

$$x_2=\gamma_k(x_1),\ k=1,2,\quad x_1\in[a_1,b_1]$$

Эти уравнения известные (заданные) вещественнозначные функции, описывающие части ляпуновских границ $\Gamma$.

Обозначим через L- оператор создаваемый граничную задачу (1)-(2).

**Сопряженное уравнение:** Как для обыкновенного линейного дифференциального уравнения [13], так и для уравнения с частными производными [14], построим сопряженное уравнение для уравнения Коши-Римана (1). Для этого используем скалярные произведения в комплексном случае, т.к. умножая уравнения (1) на $v(x)$ и интегрируем по области D:

$$0=\int_D\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\overline{v}(x)\,dx+i\int_D\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\overline{v}(x)\,dx\,.$$

Применяя интегрирование по частям или же, так называемые, формулы Остроградского-Гаусса [12] ,получим:

$$\int_\Gamma u(x)\overline{v}(x)\cos(n,x_2)dx-\int_D u(x)\frac{\partial\overline{v}(x)}{\partial x_2}dx+i\int_\Gamma u(x)\overline{v}(x)\cos(n,x_1)dx-$$

$$-i\int_D u(x)\frac{\partial\overline{v}(x)}{\partial x_1}dx=0\ ,$$

где $n-$внешняя нормаль, приведенная к границам $\Gamma$ в точке $x\in\Gamma$. Группируя соответствующие слагаемые, имеем:

$$\int_{\Gamma} u(x)\,\bar{v}(x)\left[\cos(n,x_2)+i\cos(n,x_1)\right]dx+\int_{D} u(x)\overline{\left[-\frac{\partial v(x)}{\partial x_2}+i\frac{\partial v(x)}{\partial x_1}\right]}dx=0\,. \quad (3)$$

Таким образом, для сопряженного уравнения получим:

$$l^{*}v\equiv-\frac{\partial v(x)}{\partial x_2}+i\frac{\partial v(x)}{\partial x_1}=0 \qquad . \quad (4)$$

**Необходимые условия:** Легко видеть, что фундаментальное решение для (4) имеет вид [12]:

$$V(x-\xi)=-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{x_2-\xi_2-i\,(x_1-\xi_1)} \quad . \quad (5)$$

Далее в формуле (3), заменяя $v(x)$ на фундаментальное решение (5) и учитывая свойства дельта функции Дирака [12], имеем:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\left[\cos(n,x_2)+i\cos(n,x_1)\right]u(x)}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}dx+\begin{cases}u(\xi),\xi\in D,\\ \frac{1}{2}u(\xi),\xi\in\Gamma,\end{cases}=0\,. \quad (6)$$

Второе выражение является необходимыми условиями. Приведем эти условия:

$$u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{-\cos(x_1,\tau)+i\sin(x_1,\tau)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{\cos(x_1,\tau)}dx_1+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\cos(x_1,\tau)-i\sin(x_1,\tau)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{\cos(x_1,\tau)}dx_1 \quad ,$$

$$u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{-\cos(x_1,\tau)+i\sin(x_1,\tau)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{\cos(x_1,\tau)}dx_1+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\cos(x_1,\tau)-i\sin(x_1,\tau)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{\cos(x_1,\tau)}dx_1 \quad ,$$

где $\tau$ - касательное направление, приведенное как в $\Gamma_1$, так и в $\Gamma_2$, когда точка на этой линии движется по направлении возрастания $x_1$.

Далее учитывая, что

$$\gamma_k(x_1)-\gamma_k(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)=\left[\gamma_k'(\sigma_k(x_1,\xi_1))+i\right]\cdot(x_1-\xi_1),\ k=1,2\ ,$$

приходим к следующим необходимым условиям:

$$u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))=-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_1'(x_1)}{\gamma_1'(\sigma_1)+i}\cdot\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_2'(x_1)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot u(x_1,\gamma_2(x_1))dx_1\quad ,$$

$$u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_1'(x_1)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot u(x_1,\gamma_1(x_1))dx_1+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_2'(x_1)}{\gamma_2'(\sigma_2)+i}\cdot\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1\quad .$$

Наконец, уточняя коэффициенты сингулярности, т.е.:

$$\frac{1-i\gamma_k'(x_1)}{\gamma_k'(\sigma_k)+i}=\left(\frac{1-i\gamma_k'(x_1)}{\gamma_k'(\sigma_k)+i}+i\right)-i=-i+\frac{1-i\gamma_k'(x_1)+i\gamma_k'(\sigma_k)-1}{\gamma_k'(\sigma_k(x_1,\xi_1))+i}=$$

$$=-i+\frac{\gamma_k'(\sigma_k)-\gamma_k'(x_1)}{\gamma_k'(\sigma_k)+i}\,i,\quad k=1,2\quad ,$$

имеем

$$u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))=\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1-\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\gamma_1'(\sigma_1)-\gamma_1'(x_1)}{x_1-\xi_1}\cdot$$

$$\cdot\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{\gamma_1'(\sigma_1)+i}\,dx_1+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_2'(x_1)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot u(x_1,\gamma_2(x_1))dx_1\ ,$$

$$u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=-\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{x_1-\xi_1}dx_1+\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\gamma_2'(\sigma_2)-\gamma_2'(x_1)}{x_1-\xi_1}\cdot$$

$$\cdot\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{\gamma_2'(\sigma_2)+i}\,dx_1-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_1'(x_1)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot$$

$$\cdot u(x_1,\gamma_1(x_1))dx_1\,. \tag{7}$$

Как видно из (7), каждое необходимое условие содержит один сингулярный интеграл.

**Регуляризация.** Исходя из граничного условия (2) из (7), создадим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha_1(\xi_1)u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))-\alpha_2(\xi_1)u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=\frac{i}{\pi}\times$$

$$\times\int_{a_1}^{b_1}\left\{\frac{\{[\alpha_1(\xi_1)-\alpha_1(x_1)]+\alpha_1(x_1)\}\,u(x_1,\gamma_1(x_1))}{x_1-\xi_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\{[\alpha_2(\xi_1)-\alpha_2(x_1)]+\alpha_2(x_1)\}\,u(x_1,\gamma_2(x_1))}{x_1-\xi_1}\right\}dx_1-\frac{i\alpha_1(\xi_1)}{\pi}\times$$

$$\times\int_{a_1}^{b_1}\frac{\gamma_1'(\sigma_1)-\gamma_1'(x_1)}{x_1-\xi_1}\cdot\frac{u(x_1,\gamma_1(x_1))}{\gamma_1'(\sigma_1)+i}\,dx_1+\frac{\alpha_1(\xi_1)}{\pi}\times$$

$$\times\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_2'(x_1)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot u(x_1,\gamma_2(x_1))dx_1-\frac{i\alpha_2(\xi_1)}{\pi}\times$$

$$\times\int_{a_1}^{b_1}\frac{\gamma_2'(\sigma_2)-\gamma_2'(x_1)}{x_1-\xi_1}\cdot\frac{u(x_1,\gamma_2(x_1))}{\gamma_2'(\sigma_2)+i}\,dx_1+\frac{\alpha_2(\xi_1)}{\pi}\times$$

$$\times\int_{a_1}^{b_1}\frac{1-i\gamma_1'(x_1)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot u(x_1,\gamma_1(x_1))dx_1,$$

которая, исходя из граничного условия (2) имеет вид:

$$\alpha_1(\xi_1)u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))-\alpha_2(\xi_1)u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=\frac{i}{\pi}\times$$

$$\times\int_{a_1}^{b_1}\frac{\alpha_1(\xi_1)-\alpha_1(x_1)}{x_1-\xi_1}u(x_1,\gamma_1(x_1))dx_1+\frac{i}{\pi}\times$$

$$\times\int_{a_1}^{b_1}\frac{\alpha_2(\xi_1)-\alpha_2(x_1)}{x_1-\xi_1}u(x_1,\gamma_2(x_1))dx_1-\frac{i\alpha_1(\xi_1)}{\pi}\times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \frac{\gamma_1'(\sigma_1) - \gamma_1'(x_1)}{x_1 - \xi_1} \cdot \frac{u(x_1, \gamma_1(x_1))}{\gamma_1'(\sigma_1) + i} dx_1 + \frac{\alpha_1(\xi_1)}{\pi} \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \frac{1 - i\gamma_2'(x_1)}{\gamma_2(x_1) - \gamma_1(\xi_1) + i(x_1 - \xi_1)} \cdot u(x_1, \gamma_2(x_1)) dx_1 - \frac{i\alpha_2(\xi_1)}{\pi} \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \frac{\gamma_2'(\sigma_2) - \gamma_2'(x_1)}{x_1 - \xi_1} \cdot \frac{u(x_1, \gamma_2(x_1))}{\gamma_2'(\sigma_2) + i} dx_1 + \frac{i\alpha_2(\xi_1)}{\pi} \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \frac{1 - i\gamma_1'(x_1)}{\gamma_1(x_1) - \gamma_2(\xi_1) + i(x_1 - \xi_1)} \cdot u(x_1, \gamma_1(x_1)) dx_1 , \qquad (8)$$

таким образом, имеет место следующее утверждение:

**Теорема 1:** Пусть $D \subset R^2$- выпуклая по направлению $x_2$ ограниченная область с границами $\Gamma$-линии Ляпунова. Тогда если $\alpha_1(x_1)$ и $\alpha_2(x_1)$ принадлежат некоторому классу Гельдера, то тогда соотношения (8), полученное из необходимых условий не содержит сингулярный интеграл.

**Фредгольмовость:** Объединяя граничные условия (2) с полученным регулярным соотношением (8), имеем

$$\begin{cases} \alpha_1(\xi_1)\, u(\xi_1, \gamma_1(\xi_1)) + \alpha_2(\xi_1)\, u(\xi_1, \gamma_2(\xi_1)) = l_1 u, \\ \alpha_1(\xi_1)\, u(\xi_1, \gamma_1(\xi_1)) - \alpha_2(\xi_1)\, u(\xi_1, \gamma_2(\xi_1)) = l_2 u, \end{cases} \qquad (9)$$

где

$$l_1 u = 0,$$

$$l_2 u = \frac{i}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\alpha_1(\xi_1) - \alpha_1(x_1)}{x_1 - \xi_1} u(x_1, \gamma_1(x_1)) dx_1 + \frac{i}{\pi} \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \frac{\alpha_2(\xi_1) - \alpha_2(x_1)}{x_1 - \xi_1} u(x_1, \gamma_2(x_1)) dx_1 - \frac{i\alpha_1(\xi_1)}{\pi} \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \frac{\gamma_1'(\sigma_1) - \gamma_1'(x_1)}{x_1 - \xi_1} \cdot \frac{u(x_1, \gamma_1(x_1))}{\gamma_1'(\sigma_1) + i} dx_1 + \frac{\alpha_1(\xi_1)}{\pi} \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \frac{1 - i\gamma_2'(x_1)}{\gamma_2(x_1) - \gamma_1(\xi_1) + i(x_1 - \xi_1)} \cdot u(x_1, \gamma_2(x_1))dx_1 - \frac{i\alpha_2(\xi_1)}{\pi} \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \frac{\gamma_2'(\sigma_2) - \gamma_2'(x_1)}{x_1 - \xi_1} \cdot \frac{u(x_1, \gamma_2(x_1))}{\gamma_2'(\sigma_2) + i} dx_1 + \frac{i\alpha_2(\xi_1)}{\pi} \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \frac{1 - i\gamma_1'(x_1)}{\gamma_1(x_1) - \gamma_2(\xi_1) + i(x_1 - \xi_1)} \cdot u(x_1, \gamma_1(x_1))dx_1 \ ,$$

тогда предполагая, что

$$\alpha_k(x_1) \neq 0, k = 1,2; \ \ x_1 \in [a_1, b_1], \tag{10}$$

из (9) имеем

$$u(\xi_1, \gamma_1(\xi_1)) = \frac{1}{2\alpha_1(\xi_1)}[l_1 u + l_2 u] \quad ,$$

$$u(\xi_1, \gamma_2(\xi_1)) = \frac{1}{2\alpha_2(\xi_1)}[l_1 u - l_2 u] \quad .$$

Таким образом, относительно граничных значений мы приходим к следующей системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода с регулярным ядром:

$$\begin{aligned} u(\xi_1, \gamma_1(\xi_1)) &= \int_{a_1}^{b_1} [K_{11}(\xi_1, x_1) u(x_1, \gamma_1(x_1)) + K_{12}(\xi_1, x_1) u(x_1, \gamma_2(x_1))] dx_1 , \\ u(\xi_1, \gamma_2(\xi_1)) &= \int_{a_1}^{b_1} [K_{21}(\xi_1, x_1) u(x_1, \gamma_1(x_1)) + K_{22}(\xi_1, x_1) u(x_1, \gamma_2(x_1))] dx_1 , \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$K_{11}(\xi_1, x_1) = \frac{1}{2\alpha_1(\xi_1)} \cdot \frac{i}{\pi} \cdot \frac{\alpha_1(\xi_1) - \alpha_1(x_1)}{x_1 - \xi_1} - \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{\gamma_1'(\sigma_1) - \gamma_1'(x_1)}{x_1 - \xi_1} \times$$

$$\times \frac{1}{\gamma_1'(\sigma_1) + i} + \frac{\alpha_2(\xi_1)}{2\alpha_1(\xi_1)\pi} \cdot \frac{1 - i\gamma_1'(x_1)}{\gamma_1(x_1) - \gamma_2(\xi_1) + i(x_1 - \xi_1)} ,$$

$$K_{12}(\xi_1,x_1)=\frac{1}{2\alpha_1(\xi_1)}\cdot\frac{i}{\pi}\cdot\frac{\alpha_2(\xi_1)-\alpha_2(x_1)}{x_1-\xi_1}-\frac{1}{2\pi}\times$$

$$\times\frac{1-i\gamma_2'(x_1)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}-i\frac{\alpha_2(\xi_1)}{2\alpha_1(\xi_1)\pi}\cdot\frac{\gamma_2'(\sigma_2)-\gamma_2'(x_1)}{x_1-\xi_1}\times$$

$$\times\frac{1}{\gamma_2'(\sigma_2)+i}\ ,$$

$$K_{21}(\xi_1,x_1)=-\frac{\alpha_1(\xi_1)}{2\alpha_2(\xi_1)}\cdot K_{11}(\xi_1,x_1)\ ,$$

$$K_{22}(\xi_1,x_1)=-\frac{\alpha_1(\xi_1)}{2\alpha_2(\xi_1)}\cdot K_{12}(\xi_1,x_1). \tag{12}$$

С этим доказано

**Теорема 2:** При условиях теоремы 1,если условии (10) удовлетворяются, то граничная задача (1)-(2) Фредгольмова.

**Область определения сопряженного оператора:** Возвращаясь к соотношению (3) представим его в подробном представлении

$$(lu,v)=\int_\Gamma u(x)\bar{v}(x)[\cos(n,x_2)+i\cos(n,x_1)]dx+(u,l^*v). \tag{13}$$

Теперь, если $u(x)$ удовлетворяет условию (2), то $v(x)$ определим так, чтобы интеграл по границам $\Gamma$ присутствующий в первой части (13) отпало. Для этого сперва преобразуем интеграл, участвующий в (13) .

$$\int_\Gamma u(x)\bar{v}(x)[\cos(n,x_2)+i\cos(n,x_1)]dx=-\int_{a_1}^{b_1}u(x_1,\gamma_1(x_1))\times$$

$$\times\overline{v(x_1,\gamma_1(x_1))}\cdot[1-i\gamma_1'(x_1)]\,dx_1+\int_{a_1}^{b_1}u(x_1,\gamma_2(x_1))\cdot\overline{v(x_1,\gamma_2(x_1))}\times$$

$$\times[1-i\gamma_2'(x_1)]\,dx_1\quad . \tag{14}$$

Возвращаясь к (11) из них получим:

$$\int_{a_1}^{b_1}[u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))A(\xi)+u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))B(\xi)]d\xi_1=\int_{a_1}^{b_1}A(\xi_1)\,d\xi_1\times$$

$$\times\int_{a_1}^{b_1} K_{11}(\xi_1,x_1)\,u(x_1,\gamma_1(x_1))dx_1+\int_{a_1}^{b_1} A(\xi_1)\,d\xi_1\int_{a_1}^{b_1} K_{12}(\xi_1,x_1)\times$$

$$\times u(x_1,\gamma_2(x_1))dx_1+\int_{a_1}^{b_1} B(\xi_1)\,d\xi_1\int_{a_1}^{b_1} K_{21}(\xi_1,x_1)\,u(x_1,\gamma_1(x_1))dx_1+$$

$$+\int_{a_1}^{b_1} B(\xi_1)\,d\xi_1\int_{a_1}^{b_1} K_{22}(\xi_1,x_1)\,u(x_1,\gamma_2(x_1))dx_1\quad ,$$

или же

$$\int_{a_1}^{b_1} u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))\left\{\ A(\xi_1)-\int_{a_1}^{b_1} A(x_1)\,K_{11}(\xi_1,x_1)dx_1-\right.$$

$$\left.-\int_{a_1}^{b_1} B(x_1)\,K_{21}(\xi_1,x_1)dx_1\right\}d\xi_1+\int_{a_1}^{b_1} u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))\times$$

$$\left\{B(\xi_1)-\int_{a_1}^{b_1} A(x_1)\,K_{12}(\xi_1,x_1)dx_1-\int_{a_1}^{b_1} B(x_1)\,K_{22}(\xi_1,x_1)dx_1\right\}d\xi_1=0\,, \qquad (15)$$

Наконец, исходя из (14), если предполагать

$$B(\xi_1)-\int_{a_1}^{b_1} A(x_1)\,K_{12}(\xi_1,x_1)dx_1-\int_{a_1}^{b_1} B(x_1)\,K_{22}(\xi_1,x_1)dx_1=$$

$$=\bar v(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))\left[1-i\gamma_2'(\xi_1)\right], \qquad (16)$$

то из (14) получим:

$$\int_\Gamma u(x)\bar v(x)\left[\cos(n,x_2)+i\cos(n,x_1)\right]dx=-\int_{a_1}^{b_1} u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))\times$$

$$\times\bar v(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))\cdot\left[1-\gamma_1'(\xi_1)\right]-\int_{a_1}^{b_1} u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))\cdot\left\{A(\xi_1)-\right.$$

$$\left.-\int_{a_1}^{b_1} A(x_1)\,K_{11}(\xi_1,x_1)dx_1-\int_{a_1}^{b_1} B(x_1)\,K_{21}(\xi_1,x_1)dx_1\right\}d\xi_1\quad .$$

Так как полученные выражения обращаются в нуль независимо от $u(x_1,\gamma_1(x_1))$, то имеем:

$$v(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))[1+i\gamma_1'(\xi_1)]+\overline{A}(\xi_1)-\int_{a_1}^{b_1}\overline{A}(x_1)\,\overline{K}_{11}(\xi_1,x_1)dx_1-$$

$$-\int_{a_1}^{b_1}\overline{B}(x_1)\,\overline{K}_{21}(\xi_1,x_1)dx_1=0,\quad \xi\in[a_1;b_1]. \tag{17}$$

Возвращаясь к (16) с учетом (12) получим:

$$B(\xi_1)-\int_{a_1}^{b_1}\left[A(x_1)-B(x_1)\frac{\alpha_1(x_1)}{\alpha_2(x_1)}\right]\cdot K_{12}(x_1,\xi_1)dx_1=$$

$$=\overline{v}(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))[1-i\gamma_2'(\xi_1)]\quad . \tag{18}$$

Пусть

$$\alpha_1(x_1)B(x_1)=\alpha_2(x_1)\,A(x_1)\quad . \tag{19}$$

Тогда из (18) имеем:

$$B(\xi_1)=\overline{v}(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))[1-i\gamma_2'(\xi_1)]\quad . \tag{20}$$

$$A(x_1)=\frac{\alpha_1(x_1)}{\alpha_2(x_1)}\overline{v}(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))[1-i\gamma_2'(\xi_1)]\quad . \tag{21}$$

Таким образом, из (17) для сопряженной задачи получим следующее граничное условие:

$$v(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))[1+i\gamma_1'(\xi_1)]-\frac{\overline{\alpha}_1(\xi_1)}{\overline{\alpha}_2(\xi_1)}v(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))[1+i\gamma_2'(\xi_1)]-$$

$$-\int_{a_1}^{b_1}\left[\frac{\overline{\alpha}_1(x_1)}{\overline{\alpha}_2(x_1)}v(x_1,\gamma_2(x_1))[1+i\gamma_2'(\xi_1)]-v(x_1,\gamma_2(x_1))\times\right.$$

$$\left.\times[1+i\gamma_2'(x_1)]\,\frac{\overline{\alpha}_1(x_1)}{\overline{\alpha}_2(x_1)}\right]\cdot\overline{K}_{11}(x_1,\xi_1)\,dx_1=0,$$

или же

$$\overline{\alpha}_2(\xi_1)\left[1+i\gamma_1'(\xi_1)\right]v(\xi_1,\gamma_1(\xi_1))-\overline{\alpha}_1(\xi_1)\left[1+i\gamma_2'(\xi_1)\right]v(\xi_1,\gamma_2(\xi_1))=0\,. \qquad (22)$$

Таким образом, получаем следующее утверждение:

**Теорема 3:** При условиях теоремы 2, задача сопряженная к граничной задаче (1)-(2), имеет вид (4),(22)

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Aliyev N, Jahanshahi M. Sufficient Conditions for Reduction of the BVP including a Mixed PDE with Non-local Boundary Conditions to Fredholm Integral Equations. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 28 (1997), No3, p. 419-425.
2. Алиев Н.А., Мехтиев А.А. Исследование граничной задачи для уравнения Коши-Римана на ограниченной плоской области. Научные известия, раздел естественных и технических наук, СГУ, т.2, Сумгайыт, №4, 2002.
3. Aliyev N.A, Abbasova A.H. The New Approach to Boundary Problems for Equation Cauchy-Riemaun. Abstracts of International Conference on Modern problem of Applied Mathematics and Information Technologies. Al Khorermy Uzbekistan, Tashkent, 19-21 September, 2009, p.28
4. Алиев Н.А,Зейналов Р.М. Исследование решения задачи Стеклова для уравнения Коши-Римана при граничном условии, содержащем глобальный член. Известия НАН Азерб.серия физ. Тех. и матем.наук XXX, №3, 2010, с. 75-80.
5. Аббасова А.Х, Алиев Н.А. О задаче Стефана для уравнения Коши-Римана с нелокальными и глобальными слагаемыми в граничных условиях. Конференция посвящена 870-летней годовщине со дня рождения великого поэта и философа Низами Гянджеви. Материалы Международный конференции математические теории, проблемы их пременения и обучения. Гянджа, 2011, с.45-48.
6. Алиев Н.А, Зейналов Р.М. Задача Стеклова для уравнения эллиптического типа первого порядка. Вестник БУ, физико-матем. наук №2, 2012, с. 13-20.
7. Aliyev N, Fatehi M.H, Jahanshahi M. Analytic Solution for the Cauchy-Riemaun Equation with Non-local Boundary Conditions in the First-quarter, Quarterly Journal of Science Tarbiat Moallem University, v. 9, No1, 2009, p.29-40.
8. Алиев Н.А, Багиров Г.А, Велиева З.Т. О фредгольмовости граничной задачи для системы, составленной из гиперболического и эллиптического уравнений. Journal of Contemporary Applied Mathematics. v 1, No2, 2011, p. 36-42.
9. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М.: Наука , 1966.
10. Aliyev N.A, Hosseini S.M. A Regularization of Fredholm Type Singular Integral equations, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 26(2001), No2, p.123-128.
11. Aliyev N.A, Hosseini S.M. Multidimensional Singular Fredholm Integral Equations in a Finite Domain and Their Regularization, Southeast Asian Bulleten Mathematics, 27 (2003), No3, p. 395-408.
12. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
13. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 526 с.
14. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложение. М.: Мир, 1971, 371 с.

## KOŞİ-RİMAN TƏNLİYİ ÜÇÜN QOŞMA MƏSƏLƏNİN QURULMASI

**N.Ə.ƏLİYEV, A.M.QULİYEVA**

### XÜLASƏ

Məlumdur ki, əsasən elliptik tip tənliklər üçün sərhəd məsələlərinə baxılır. Bu məqalədə, həmçinin birinci tərtib elliptik tip tənlik üçün, yəni Koşi-Riman tənliyi üçün sərhəd məsələsinin qurulmasına həsr olunub. Sərhəd məsələsi üçün bütöv sərhədin daşıyıcı olmasını qeyri-lokal şərtlər qoymaqla təmin etmək olar. Qeyd edək ki, Dirixle, Neyman, Puankare (harada ki, sərhəd məsələsi üçün bütöv sərhəd daşıyıcıdır) lokal sərhəd şərtləri bu halda tətbiq edilə bilməz.

**Açar sözlər:** Koşi-Riman tənliyi, qeyri-lokal sərhəd şərtləri, qoşma məsələ, fundamental həll, zəruri şərtlər, sinqulyarlıq, requlyarlaşdırma

## CONSTRUCTİON OF ADJOİNT PROBLEM FOR CAUCHY-RİEMAUN EQUATİON

**N.A.ALİYEV, A.M.GULİYEVA**

### SUMMARY

Apparently, adjoint problems are generally considered for elliptic type equations the model of which is the Laplas equation. This paper is also dedicated to the construction of an adjoint problem for an elliptic type equation, i.e. for Cauchy-Riemaun equation. For assuring the entire boundary to be a carrier, it is neceassary to set non-local conditions. In this case, we can't apply local boundary conditions such as Dirichle, Neuman or Poincare in which the entire boundary is the carrier for the boundary condition.

**Key words:** Cauchy-Riemaun equation, nonlocal boundary conditions, adjoint problem, fundamental solution, necessary conditions, singularity, regularization

*Принято в редакцию: 22.11.2013 г.*
*Подписано к печати: 27.12.2013 г.*